D.B

Université A. Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Année : 2008/2009
Analyse 2 : SMA

Série N^0 2

Exercice 1. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$ (on pose $t = \dfrac{1}{u}$),

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1-2\sin x}$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log t}{t^2\sqrt{1-t}}\,dt$,

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}dt$, e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t\,\frac{e^{-t}}{t}dt$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}\, e^{-x^2}\, dx.$$

1) Montrer que l'intégrale généralisée I_n converge.

2) Calculer I_0 et I_1.

3) A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}.$$

1) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale généralisée I_n converge et que $I_n > 0$.

2) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

3) En déduire que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles définies sur une partie non vide ouverte E de $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément sur E vers une fonction continue f. Montrer que pour tout $a \in E$ et pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E qui converge vers a, la suite numérique $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.
Application. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = nx\, e^{-nx^2} + x$$

ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. *Indication :* Considérer la suite $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}.$$

ETUSUP .com

1) (i) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in I\!N^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.

(ii) Soit $n \in I\!N^*$ et posons, $g_n = f - f_n$. Montrer que g_n est impaire et donner le tableau des variations de g_n sur $[0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.

(iii) En utilisant **1)(ii)**, déduire que $(f_n)_{n\in I\!N^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

2) En utilisant **1)(iii)**, déduire que la suite réelle $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in I\!N^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 6. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ des suites de fonctions suivantes :

a) $f_n(x) = n^\alpha x\, \mathrm{e}^{-nx} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ et } n \in I\!N^*)$;

b) $g_n(x) = \dfrac{\log(1+nx)}{1+nx} \quad (n \in I\!N)$.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n\in I\!N^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = (1+x^n)^{\frac{1}{n}}.$$

a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in I\!N^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire que la suite réelle $\left(\int_0^2 f_n(x)dx\right)_{n\in I\!N^*}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 8. Soit $(f_n)_{n\in I\!N}$ la suite de fonctions définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f_n(x) = n \sin x \cdot \cos^n x.$$

a) Déterminer la limite simple de $(f_n)_{n\in I\!N}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$. Conclure.

ETUSUP .com

Université A. Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année : 2007/2008
Analyse 2
SMA-SMI

Corrigé de la série N°2

Exercice 1.

a) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$ avec $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

Il y a problème en 0. f est continue sur $]0,1]$ donc continue sur tout segment $[\alpha,\beta] \subset]0,1]$ (avec $0 < \alpha < \beta \leq 1$). On pose le changement de variable

$x = \sin^2 t$, $x \geq 0$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Donc, $\sin t \geq 0$

et $t = \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x})$. $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

$\cancel{x} \to a$ ✓

$dx = 2 \sin t \cos t\, dt$.

Soit $a \in]0,1]$.

$$\int_a^1 f(x)\, dx = \int_{\operatorname{Arcsin}(\sqrt{a})}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} \cdot 2 \sin t \cdot \cos t\, dt$$

ETUSUP .com

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \int_{\operatorname{Arcsin}(\sqrt{a})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} \cdot 2 \sin t \cos t \, dt$$

(car sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t \geq 0$ et $\sin t \geq 0$).

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \int_{\operatorname{Arcsin}(\sqrt{a})}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t \, dt = \int_{\operatorname{Arcsin}(\sqrt{a})}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2t))\,dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t) \right]_{\operatorname{Arcsin}(\sqrt{a})}^{\pi/2}$$

posons, valeur choisie $\alpha = \operatorname{Arcsin}(\sqrt{a})$. Alors,

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \boxed{\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha).}$$

Lorsque $a \longrightarrow 0^+$, $\alpha \longrightarrow 0$. Par suite,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{a \to 0^+} \left(\int_a^1 f(x)\,dx \right) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}. \text{ Donc,}$$

$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \text{ converge.}}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}\,dt = \int_{-1}^0 f(t)\,dt$ avec $f(t) = \dfrac{e^t}{\sqrt{1-e^t}}$.

$(e^t - 1 = 0) \Leftrightarrow (e^t = 1) \Leftrightarrow (t = \log 1 = 0)$.

De plus, si $t \in [-1, 0[$ alors, $e^t < e^0 = 1 \Rightarrow 1 - e^t > 0$

ETUSUP .com

f est continue sur $[-1,0[$ donc continue sur tout segment $[\alpha,\beta] \subset [-1,0[$ (avec $-1 \leq \alpha < \beta < 0$).

Il y a problème en 0.

<u>Au voisinage de 0 :</u>

- $\forall t \in [-1,0[$, $f(t) > 0$;
- f est continue sur $[-1,0[$;
- $e^t \underset{0^-}{\sim} 1$, $e^t = 1 + t + o(t) \Rightarrow 1 - e^t = -t - o(t)$.

Par suite, $\sqrt{1-e^t} = \sqrt{-t-o(t)} = (-t)^{\frac{1}{2}}(1+o(1))$.

D'où, $\sqrt{1-e^t} \underset{0^-}{\sim} (-t)^{1/2}$. Par conséquent,

$$f(t) \underset{0^-}{\sim} \frac{1}{(-t)^{\frac{1}{2}}}$$

Les 2 intégrales généralisées $\int_{-1}^{0} f(t)\,dt$ et $\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(-t)^{\frac{1}{2}}}$ sont de même nature. Or, $\frac{1}{2} < 1$

$t \to 0$, $x \to$
$t \to -1$, $x \to$

$\boxed{\text{donc } \int_{-1}^{0} f(t)\,dt \text{ converge.}}$ <u>Calcul :</u> On pose, $x = e^t$.

$dx = e^t dt$ et $\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_{e^{-1}}^{1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cancel{x}\,\frac{dx}{\cancel{x}} = \left[-\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{e^{-1}}^{1}$

c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ avec $f(x) = \frac{\operatorname{Arctg} x}{x\sqrt{1+x^2}}$

$= -2\left[\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{e^{-1}}^{1} = -2\left((1-1)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = -2\left(-\sqrt{1-\frac{1}{e}}\right)$

$\boxed{= 2\sqrt{1-e^{-1}}}$

ETUSUP .com

Arctg est continue sur $\mathbb{R}$ par suite, f est continue sur $[1, +\infty[$. Il y a problème en $+\infty$.

De plus, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) > 0$.

<u>Au voisinage de $+\infty$:</u>

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arctg} x}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{\operatorname{Arctg} x}{x.\sqrt{x^2}.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\operatorname{Arctg} x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{Arctg} x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ alors,

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^2}$. De plus, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$\frac{\pi}{2x^2} > 0$. Donc, les intégrales généralisées

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\,dx$ sont de même nature.

Or, $2 > 1$ donc $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx \text{ converge.}}$

<u>Remarque.</u> $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x}{x}\,dx \text{ diverge.}}$

<u>En effet</u> : $\frac{\operatorname{Arctg} x}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$ et

ETUSUP .com

$$\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x}\,dx = \frac{\pi}{2} \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{b\to+\infty} [\log x]_1^b$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{b\to+\infty} (\log b) = +\infty \notin \mathbb{R}. \text{ D'où,}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Argtg} x}{x}\,dx$ diverge.

d) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ avec $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Il y a problème en 0 et $+\infty$.

f est continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$.

(*) <u>Nature de $\int_0^1 f(x)\,dx$.</u>

Comme $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$ alors, f est prolongeable par continuité en 0 et soit $\tilde{f}$ ce prolongement.

$\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$

$\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\tilde{f}$ est continue sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ (avec $0 \leq \alpha < \beta < +\infty$).

En particulier, $\tilde{f}$ est continue sur $[0,1]$.

ETUSUP .com

Par suite, $\int_0^1 \tilde{f}(x)\,dx$ existe et est finie

donc converge et $\int_0^1 \tilde{f}(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

(*) <u>Nature de $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.</u>

Soit $a > 1$. Utilisons une intégration par

parties : $\begin{cases} u'(x) = \sin x \\ v(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$, $u(x) = -\cos x$, $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Alors,

$$\int_1^a f(x)\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \cos 1 - \frac{\cos a}{a} - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Pour tout $a > 1$, $\left|\frac{\cos a}{a}\right| \leq \frac{1}{a} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$. D'où, $\lim\limits_{a \to +\infty} \left(\frac{\cos a}{a}\right) = 0$.

Par suite,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

De plus, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (car $2 > 1$) alors, l'intégrale

ETUSUP .com

généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ est absolument convergente donc convergente. Il en résulte que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(*) Comme $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent alors, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ converge}}$ et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

<u>Exercice 2.</u>

On pose,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt.$$

$$f(t) = \frac{1}{1+t^4} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t^2}{1+t^4}.$$

1) f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$ donc continues sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ (avec $0 \leq \alpha < \beta < +\infty$).

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt \text{ et}$$

ETUSUP .com

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^{+\infty} g(t)\,dt.$$

f et g sont continues sur $[0,1]$ alors, $\int_0^1 f(t)\,dt$ et $\int_0^1 g(t)\,dt$ existent et sont finies.

<u>Au voisinage de $+\infty$:</u>

$$f(t) = \frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4} \text{ et } \underbrace{g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^4} = \frac{1}{t^2}}$$

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{t^2}{t^4\left(1+\frac{1}{t^4}\right)} = \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

(*) • $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$

• $\forall t \in [1,+\infty[$, $f(t) > 0$ et $\frac{1}{t^4} > 0$

• f est continue sur $[1,+\infty[$. Alors, les deux intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ sont de même nature. Or, $4>1$ alors, $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Par suite, $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

(*) • $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$

• g et $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1,+\infty[$ et $2>1$. Alors,

ETUSUP .com

$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et par suite, $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

<u>Conclusion</u>. I et J convergent.

2) (i) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$.

$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \lim_{a \to 0^+} \left(\int_a^1 \frac{dt}{1+t^4} \right)$ et

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \lim_{b \to +\infty} \left(\int_1^b \frac{dt}{1+t^4} \right)$.

Soient $a \in]0, 1]$ et $b > 1$. On pose le changement de variable :

$$u = \frac{1}{t}, \quad du = -\frac{dt}{t^2} \text{ et } dt = -\frac{du}{u^2}.$$

Par suite,

$$\int_a^1 \frac{dt}{1+t^4} = \int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{-\frac{du}{u^2}}{1+\frac{1}{u^4}} = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{u^2}{1+u^4}\,du \text{ et}$$

$$\int_1^b \frac{dt}{1+t^4} = \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{-\frac{du}{u^2}}{1+\frac{1}{u^4}}\,du = \int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{u^2}{1+u^4}\,du.$$

ETUSUP .com

Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \lim_{a\to 0^+}\left(\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{u^2}{1+u^4}\,du\right) = \int_1^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,du \text{ et}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \lim_{b\to +\infty}\left(\int_{\frac{1}{b}}^{1} \frac{u^2}{1+u^4}\,du\right) = \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^4}\,du.$$

<u>D'où</u>, $$I = \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^4}\,du + \int_1^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^4}\,du = J.$$

(ii) (*) $$I + J = 2I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} + \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt.$$

$ch^2 u =$
$sh^2 u = \frac{1-ch 2u}{2}$
$\Leftrightarrow 2sh^2 u - 1 = +ch 2u$

Posons, $t = e^u$. Alors, $u = \log t$ et

$$\begin{cases} t \to 0^+ \Rightarrow u \to -\infty \\ t \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty. \end{cases}$$ Par suite,

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2u}}{1+e^{4u}} \cdot e^u\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1+e^{2u}}{2e^u}}{\frac{1+e^{4u}}{2e^{2u}}}\,du$$

$\frac{2e^{2u}}{2e^u}$

$ch(2u)$ $sh^2(2u) = 1$
$1 + sh^2(2u)$

$e^u = \frac{2e^{2u}}{2u} \cdot e^{2u-u} = e^u$

ch
$sh\,u = 2ch$
$sh(2u) = 2ch\,u\,sh\,u$

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch\,u}{ch(2u)}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch\,u}{1+2\,sh^2 u}\,du,$$

$ch\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{e^u(e^u+e^{-u})}{2e^u} = \boxed{\frac{e^{2u}+1}{2e^u}}$

$ch\,u(2u) = \frac{e^{2u}+e^{-2u}}{2} = \frac{e^{2u}(e^{2u}+e^{-2u})}{2e^{2u}} = \boxed{\frac{e^{4u}+1}{2e^{2u}}}$

$A \xrightarrow{+3} 4$, $5 \xrightarrow{+3} 8$

ETUSUP .com

ch $\quad 2sh^2(u) = \frac{1 + ch(2u)}{2}$

$\ldots\ldots -1$

$2sh^2(u) = \frac{ch(2u) - 1}{2}$

$2sh^2u + 1 = ch(2u)$

car $ch(2u) = 1 + 2\,sh^2 u$.

$$2I = \int_{-\infty}^{0} \frac{ch\,u}{1+2sh^2u}\,du + \int_{0}^{+\infty} \frac{ch\,u}{1+2sh^2u}\,du.$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{ch\,u}{1+2sh^2u}\,du = \lim_{b\to-\infty}\left(\int_{b}^{0} \frac{ch\,u}{1+2sh^2u}\,du\right).$$

On pose, $u = -s$. $du = -ds$ et $s = -u$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{ch\,u}{1+2sh^2u}\,du = \lim_{b\to-\infty}\left(\int_{-b}^{0} \frac{ch\,s}{1+2sh^2s}(-ds)\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\int_{0}^{-b} \frac{ch\,s}{1+2sh^2s}\,ds\right) = \int_{0}^{+\infty} \frac{ch\,s}{1+2sh^2s}\,ds.$$

D'où, $2I = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{ch\,u}{1+2sh^2u}\,du$. Ou encore,

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{ch\,u}{1+2sh^2u}\,du = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_{0}^{b} \frac{ch\,u}{1+2sh^2u}\,du\right).$$

$u \to 0 \quad x \to 0$

$u \to +\infty \quad x \to sh\,b$

Après, on pose $x = sh\,u$. $dx = ch\,u\,du$. Par suite,

$$I = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_{0}^{sh\,b} \frac{dx}{1+2x^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\int_{0}^{sh\,b} \frac{\sqrt{2}\,dx}{1+(\sqrt{2}x)^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[Arctg(\sqrt{2}x)\right]_{0}^{sh\,b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\pi}{4}},$$

ETUSUP .com

car $b \longrightarrow +\infty \Rightarrow (\operatorname{sh} b \to +\infty) \Rightarrow \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}\operatorname{sh} b) \to \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $I = J = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$.

3) (*) Posons, $K = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int_0^{\pi/2} h(x)\,dx$.

Il y a problème en 0 et $\frac{\pi}{2}$. h est continue et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

$K = \int_0^a h(x)\,dx + \int_a^{\pi/2} h(x)\,dx$ (avec $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

• <u>Au point $\frac{\pi}{2}$</u>.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\right) = 0$. Donc, h est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ et soit $\tilde{h}$ ce prolongement.

$\tilde{h} :]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Par suite, $\int_a^{\pi/2} h(x)\,dx = \int_a^{\pi/2} \tilde{h}(x)\,dx$ existe et finie.

• <u>Au point 0</u>.

$$\operatorname{tg} x \underset{0+}{\sim} x \Rightarrow h(x) \underset{0+}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}.$$

ETUSUP .com

Comme $\frac{1}{2} < 1$ alors, $\int_0^a \frac{dx}{x^{1/2}}$ et par suite

$\int_0^a h(x)\,dx$ converge. D'où, K converge.

(*) <u>Calcul de K.</u>

Posons le changement de variable :

$t = \sqrt{tg\,x}$. Comme $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors,

$tg\,x \in]0, +\infty[$. $t^2 = tg\,x$ et $x = Arctg(t^2)$.

$$dx = \frac{1}{1+(t^2)^2} \cdot 2t\,dt = \frac{2t}{1+t^4}\,dt. \text{ D'où,}$$

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2t}{1+t^4}\,dt}{t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = 2I = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

<u>Exercice 3.</u>

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+2t+5)^n} = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \text{ avec } f_n(t) = \frac{1}{(t^2+2t+5)^n}$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

ETUSUP .com

On considère $P(t) = t^2 + 2t + 5$. $\Delta' = 1 - 5 = -4 < 0$.

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) > 0$.

f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ donc

continue sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ (avec $0 \leq \alpha < \beta < +\infty$)

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f_n(t) > 0$.

Il y a problème en $(+\infty)$.

$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

f_n est continue sur $[0, 1]$ alors, $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ est

une intégrale définie donc converge.

D'autre part,

- $\forall t \in [1, +\infty[$, $f_n(t) > 0$;
- f_n est continue sur $[1, +\infty[$;
- $f_n(t) = \dfrac{1}{t^{2n}\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{5}{t^2}\right)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$
- $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2n > 1$. D'où, $\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$

ETUSUP .com

converge. Comme $\int_0^1 f_n(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$ convergent alors, I_n converge.

2) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+5} = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b \frac{dt}{t^2+2t+5}\right)$.

soit $b>0$. $\int_0^b \frac{dt}{t^2+2t+5} = \int_0^b \frac{dt}{(t+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int_0^b \frac{dt}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}$.

On pose, $u = \frac{t+1}{2}$. $du = \frac{dt}{2}$. D'où,

$$\int_0^b \frac{dt}{t^2+2t+5} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{b+1}{2}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Arctg} u\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{b+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\left(\frac{b+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{1}{2}.$$ D'où,

$I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}\frac{1}{2}\right)$.

Or, pour tout $x>0$, $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

D'où, $I_1 = \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} 2$.

3) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $b>0$.

$$\int_0^b f_n(t)\,dt = \int_0^b (t^2+2t+5)^{-n}\,dt.$$

ETUSUP .com

On intègre par parties,

$$\begin{cases} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = (t^2+2t+5)^{-n}, & v'(t) = -n\,(t^2+2t+5)^{-n-1}(2t+2) \end{cases}$$

$$v'(t) = -2n \cdot \frac{t+1}{(t^2+2t+5)^{n+1}}$$

$$\int_0^b f_n(t)\,dt = \left[\frac{t}{(t^2+2t+5)^n}\right]_0^b + 2n\int_0^b \frac{t^2+t}{(t^2+2t+5)^{n+1}}\,dt$$

Or, $t^2+t = t^2+2t+5 - \frac{1}{2}(2t+2) - 4$. Par suite,

$$\int_0^b f_n(t)\,dt = \frac{b}{(b^2+2b+5)^n} + 2n\left(\int_0^b \left(\frac{1}{(t^2+2t+5)^n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2t+2}{(t^2+2t+5)^{n+1}} - \frac{4}{(t^2+2t+5)^{n+1}}\right)dt\right)$$

$$\int_0^b f_n(t)\,dt = \frac{b}{(b^2+2b+5)^n} + 2n\left(\int_0^b f_n(t)\,dt - 4\int_0^b f_{n+1}(t)\,dt - \frac{1}{2}\left[\frac{(t^2+2t+5)^{-n+1+1}}{-n+1-1}\right]_0^b\right)$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^b f_n(t)\,dt = \frac{b}{(b^2+2b+5)^n} + 2n\left(\int_0^b f_n(t)\,dt - 4\int_0^b f_{n+1}(t)\,dt + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{(b^2+2b+5)^n} - \frac{1}{5^n}\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$8n\int_0^b f_{n+1}(t)\,dt = (2n-1)\int_0^b f_n(t)\,dt + \frac{b+1}{(b^2+2b+5)^n} - \frac{1}{5^n}$$

ETUSUP .com

Or, $\dfrac{b+1}{(b^2+2b+5)^n} = \dfrac{b}{b^{2n}} \cdot \dfrac{1+\frac{1}{b}}{\left(1+\frac{2}{b}+\frac{5}{b^2}\right)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{b^{2n-1}}$ et

$2n-1>0$. D'où, $\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\dfrac{b+1}{(b^2+2b+5)^n}\right] = \lim\limits_{b\to+\infty}\left[\dfrac{1}{b^{2n-1}}\right]=0$.

Par passage à la limite lorsque $b\to+\infty$, on obtient

$$8n\, I_{n+1} = (2n-1)\, I_n - \frac{1}{5^n}.$$

<u>Exercice 4.</u>

Soit E une partie non vide ouverte de $\mathbb{R}$. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur E vers une fonction f continue sur E. Soient $a\in E$ et $(x_n)_n$ une suite réelle d'éléments de E telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$f_n(x_n)-f(a) = f_n(x_n)-f(x_n)+f(x_n)-f(a)$.

$|f_n(x_n)-f(a)| \leq |f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(a)|$, (1).

Soit $\varepsilon>0$. Comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.U.} f$ sur E, il existe

ETUSUP .com

$N^1_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n : n > N^1_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2).$$

De plus, la limite uniforme f est supposée être continue sur E donc, en particulier, continue en a.

Alors,

$$\exists \alpha_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in E : |x - a| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, (3).$$

Et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ alors,

$$\exists N^2_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n : n > N^2_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \alpha_\varepsilon, \ (4).$$

En posant $N_\varepsilon = \max(N^1_\varepsilon, N^2_\varepsilon)$, il vient d'après (1), (2), (3) et (4) :

$$\forall n : n > N_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x_n) - f(a)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

D'où, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = f(a)$.

<u>Application.</u>

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = n x e^{-n x^2} + x.$$

ETUSUP .com

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

<u>Convergence simple</u>.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$.
- Si $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{x} \underbrace{\left(n x^2 e^{-n x^2} \right)}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} + x \right] = x$.

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{C.S.} f$ sur $\mathbb{R}$ avec $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$.

Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Considérons la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$x_n = \frac{1}{n}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in \mathbb{R}^*$ et

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$. Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f_n(x_n) = n \cdot \frac{1}{n} e^{-n \cdot \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n} = e^{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}.$$

D'où, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = 1 \neq f(0) = 0$. Par conséquent,

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

ETUSUP .com

Exercice 5.

a) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Convergence simple.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$.
- si $x \in \mathbb{R}^*$ alors, $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2} \cdot \dfrac{1}{1 + \underbrace{\dfrac{1}{nx^2}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}}$

$f_n(x) \underset{(n \to +\infty)}{\sim} \dfrac{1}{nx}$. Par suite,

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{nx}\right) = 0$. D'où,

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{c.s.} f$ sur $\mathbb{R}$ avec $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array}$.

Convergence uniforme.

Cherchons la limite,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}_+} f_n(x) \right)$$ car les fonctions

f_n sont impaires et positives sur $\mathbb{R}_+$.

ETUSUP .com

Les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (par suite sur $\mathbb{R}_+$) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'_n(x) = \frac{1 + n x^2 - x \cdot 2 n x}{(1 + n x^2)^2} = \frac{1 - n x^2}{(1 + n x^2)^2}$$

$$f'_n(x) = \frac{(1 - \sqrt{n}\, x)(1 + \sqrt{n}\, x)}{(1 + n x^2)^2}.$$

$$f'_n(x) = 0 \iff (1 - n x^2 = 0) \iff \left(x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

sur $\mathbb{R}_+$, $\text{signe}(f'_n(x)) = \text{signe}(1 - \sqrt{n}\, x)$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$x - \frac{1}{\sqrt{n}}$		$-$	0	$+$	
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$\searrow$	0

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{n x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n x}\right) = 0.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}. \text{ D'où,}$$

ETUSUP .com

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)=0. \text{ Donc,}$$

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.U.} f \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

b) $g_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ où $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

Les fonctions g_n sont impaires.

<u>Convergence simple.</u>

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $g_n(0)=0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(0)=0$.

- Si $x\in\mathbb{R}^*$ alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|g_n(x)|\leq\frac{1}{1+n^2x^2}.$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+n^2x^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2x^2}\right)=0$

alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)=0$. D'où,

$$g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.S.} g \quad \text{sur } \mathbb{R} \text{ avec } g:\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto 0.\end{array}$$

ETUSUP .com

Il est clair que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Considérons la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{1}{n}$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$g_n(x_n) = \frac{\sin(n.\frac{1}{n})}{1+n^2.\frac{1}{n^2}} = \frac{\sin 1}{2}.$$ D'où,

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x_n) = \frac{\sin 1}{2} \neq g(0) = 0.$$ Par conséquent, d'après l'exercice 4), $(g_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-x^n}$.

1) (*) Comme, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \\ +\infty & \text{si } x>1 \end{cases}$

ETUSUP .com

alors,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(e^{-x^n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(*) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

2) a) Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour tout $x \in [0,\alpha]$, on a $f(x) = 1$ et $0 \leq 1 - e^{-x^n} \leq 1 - e^{-\alpha^n}$. Donc,

$$\sup_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\alpha]} |e^{-x^n} - 1| = \sup_{x\in[0,\alpha]} (1 - e^{-x^n})$$
$$= 1 - e^{-\alpha^n}.$$

Puisque $\alpha \in]0,1[$ alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim_{n\to+\infty} (1 - e^{-\alpha^n}) = 0.$$

ETUSUP .com

ce qui montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,\alpha]$.

b) Soit $\beta>1$. Pour tout $x\in[\beta,+\infty[$, $f(x)=0$.

$$0\leq \sup_{x\in[\beta,+\infty[}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[\beta,+\infty[} f_n(x) = \sup_{x\in[\beta,+\infty[}(e^{-x^n}) = e^{-\beta^n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in[\beta,+\infty[}|f_n(x)-f(x)|\right) = \lim_{n\to+\infty}(e^{-\beta^n}) = 0.$$ Ce qui montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[\beta,+\infty[$.

3) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie par

$$g_n(x) = x^n f_n(x) = x^n e^{-x^n}$$

est dérivable sur $[1,+\infty[$ et, pour tout $x\geq 1$, on a

$$g'_n(x) = n x^{n-1} e^{-x^n} + x^n(-n x^{n-1}) e^{-x^n}$$

$$g'_n(x) = n x^{n-1}(1-x^n) e^{-x^n} \leq 0.$$

Donc, g_n est décroissante sur $[1,+\infty[$ et par suite, pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a

ETUSUP .com

$g_n(x) \leq g_n(1) = \frac{1}{e}$ c'est-à-dire

$x^n f_n(x) \leq \frac{1}{e}$.

b) Soit $n \geq 2$. $I_n = \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_1^{\lambda} f_n(x)\,dx \right)$.

soit $\lambda > 1$. D'après 3) a), pour tout $x \in [1, \lambda]$, on a

$$0 < x^n f_n(x) \leq \frac{1}{e} \Rightarrow 0 < f_n(x) \leq \frac{1}{e x^n}$$

Par conséquent,

$$0 \leq \int_1^{\lambda} f_n(x)\,dx \leq \int_1^{\lambda} \frac{dx}{e x^n} = \frac{1}{e} \int_1^{\lambda} x^{-n}\,dx.$$

$$0 \leq \int_1^{\lambda} f_n(x)\,dx \leq \frac{1}{e} \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^{\lambda} = \frac{1}{e} \left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{(1-n)\lambda^{n-1}} \right]$$

Comme $n \geq 2$ alors, $n-1 \geq 1$ et par suite,

$\lim_{\lambda \to +\infty} \left[\frac{1}{(1-n)\lambda^{n-1}} \right] = 0$. Et donc,

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e x^n} = \frac{1}{e(n-1)}$ converge. Par suite,

$I_n = \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge et on a

ETUSUP .com

$0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{e(n-1)}$. D'où, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

4) (i) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leq m$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a : $0 \leq x^m \leq x^n \leq 1$ donc $-x^n \leq -x^m \leq 0$. Et par suite,

$0 < f_n(x) = e^{-x^n} \leq f_m(x) = e^{-x^m} \leq 1$. Par conséquent,

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq u_m = \int_0^1 f_m(x)\,dx \leq 1.$$

D'où, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante majorée donc convergente.

(ii) Soit $\alpha \in]0,1[$. Alors,

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^\alpha f_n(x)\,dx + \underbrace{\int_\alpha^1 f_n(x)\,dx}_{\geq 0} \geq \int_0^\alpha f_n(x)\,dx$$

$$u_n \geq \int_0^\alpha e^{-x^n}\,dx \geq \int_0^\alpha e^{-\alpha^n}\,dx = \alpha e^{-\alpha^n}.$$

Comme $\alpha \in]0,1[$ alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\alpha^n) = 0$ et par suite,

$1 \geq \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq \alpha$ et ceci pour tout $\alpha \in]0,1[$.

En faisant tendre $\alpha \to 1$, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

ETUSUP .com

(iii) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = u_n + I_n.$$

Comme les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et (I_n) convergent alors, $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} I_n = 1+0=1.$$

Or, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$$= \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} 0.\,dx = 1.$$ D'où,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..